Índice

- Sistemas de medidas angulares I.....5
- Sistemas de medidas angulares II.....15
- Sector Circular – Longitud de arco – Área del sector circular 25
- Razones trigonométricas de un ángulo agudo.....37
- Razones trigonométricas de ángulos notables.....47
- Propiedades de las razones trigonométricas.....59
- Resolución de triángulos rectángulos.....67
- Geometría analítica.....80
- Ecuación general de la recta.....93
- Razones trigonométricas de ángulos en posición normal I.....103
- Razones trigonométricas de ángulos en posición normal II.....115
- Reducción al primer cuadrante I.....125
- Reducción al primer cuadrante II.....135
- Introducción a los números reales.....146
- Circunferencia trigonométrica I.....155
- Circunferencia trigonométrica II.....164
- Identidades trigonométricas fundamentales.....176
- Identidades trigonométricas auxiliares.....184
- Identidades trigonométricas de ángulos compuestos.....192
- Identidades trigonométricas del ángulo doble.....201
- Identidades del ángulo mitad.....209
- Transformaciones trigonométricas.....218
- Ecuaciones trigonométricas.....225

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES I

CAPÍTULO 1

MATEMÁTICA

Aprendizajes esperados

- Define y reconoce el ángulo trigonométrico.
- Aplica la equivalencia entre los sistemas de medición angular en la resolución de problemas.

Helicocuriosidades

Un tema especial: El tamaño de la Tierra

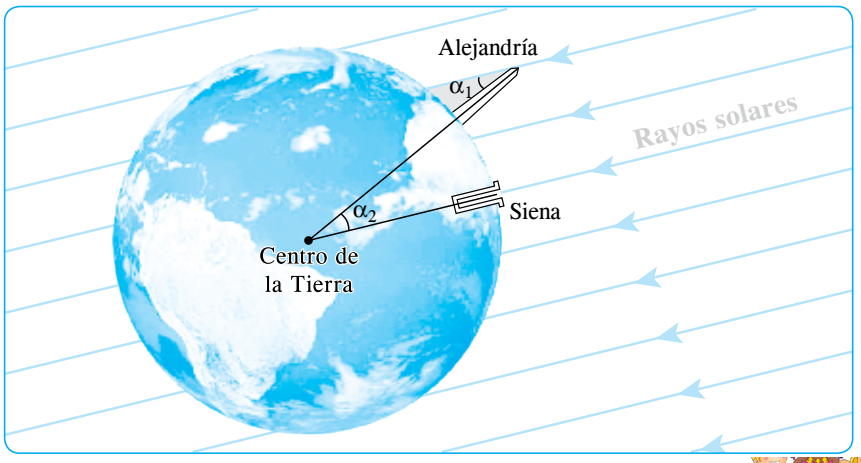
Durante casi 1000 años después de la época de Alejandro Magno, la ciudad de Alejandría cerca de la desembocadura del Nilo, fue centro de la cultura por excelencia. Alrededor del año 300 a. C. se fundó allí una universidad y una gran biblioteca, donde se acumularon muchos de los escritos y observaciones del mundo antiguo. Arquímedes, Euclides, Tolomeo y probablemente Hiparco, estuvieron estrechamente ligados a la universidad, junto con otros hombres de ciencia menos conocidos, como Eratóstenes (griego 275-194 a. C.), el cual asumió el cargo de bibliotecario de la universidad durante un largo periodo.

Muchos años de la época de Eratóstenes existían argumentos convincentes que la Tierra era esférica.

Dichos argumentos eran

1. La sombra que la Tierra proyecta sobre la Luna durante un elipse aparece en forma circular.
2. Un cambio relativamente pequeño de la posición norte-sur sobre la superficie de la Tierra produce una variación apreciable en la altura de ciertas estrellas en el horizonte. Basado en esto Eratóstenes dio un método, usando trigonometría, para calcular el tamaño de la Tierra.

Eratóstenes obtuvo antecedentes sobre un fenómeno no usual en un pozo profundo cerca de Siena, que por estimados se hallaba a unas 500 millas del sur de Alejandría.



Un día del año al medio día la luz del sol penetraba verticalmente en el pozo, produciéndose reflejo en el agua. Él razonó que al ocurrir este fenómeno, el Sol, el pozo y el centro de la Tierra debían estar en línea recta. También observó que al mismo tiempo una columna vertical en Alejandría proyectaba una sombra que indicaba que el astro se encontraba a 7° 12' al sur del cenit. Asumiendo que Alejandría y Siena, se encontraban en el mismo meridiano y que los rayos del Sol son paralelos determinó la circunferencia de la Tierra.

Conociendo que el ángulo que se forma desde el centro de la Tierra hasta las dos ciudades es de 7° 12' y que a ese ángulo le corresponde el arco de 500 millas de longitud, dedujo que la circunferencia C estaría dada por la ecuación

$$\frac{C}{500 \text{ millas}} = \frac{360°}{7° \ 12'}$$

pero como una milla es aproximadamente 1,6 km y un grado es 60 min, se obtiene que 7° 12' es igual a 7,2°, entonces

$$\frac{C}{800 \text{ km}} = \frac{360°}{7{,}2°}$$

$$C = 50 \times 800 \text{ km} = 40\ 000 \text{ km}$$

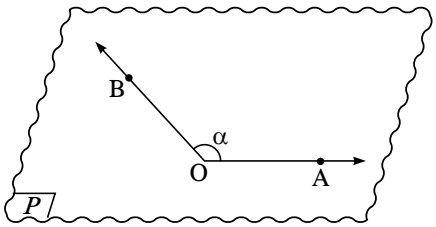
Lo que significó un gran paso dado que la longitud del ecuador es de 40 076,594 km.

Helicoteoría

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES I

1. Ángulo trigonométrico

Es aquel que se genera por la rotación de un rayo (en un mismo plano) alrededor de un punto fijo llamado vértice, desde una posición inicial hasta una posición final.



Donde

O: vértice del ángulo

$\overrightarrow{OA}$: lado inicial

$\overrightarrow{OB}$: lado final

α: medida del ángulo AOB

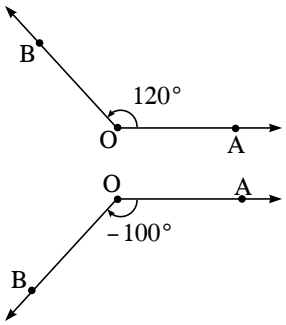
Sentido de rotación

El rayo puede girar en dos sentidos

a. Antihorario: Cuando gira en sentido contrario a las manecillas del reloj, generando ángulos con medida positiva.

b. Horario: Cuando gira en el mismo sentido de las manecillas del reloj, generando ángulos con medida negativa.

Ejemplos

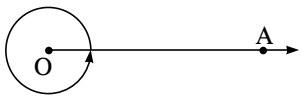


2. Sistemas de medición angular

La medida de un ángulo se expresa convencionalmente en tres sistemas: sexagesimal, centesimal o radial.

A. Ángulo de una vuelta

Es aquel que se genera cuando un rayo gira hasta encontrarse en su posición inicial por primera vez.



B. Sistema sexagesimal

Es aquel en el que el ángulo de una vuelta está dividido en 360 partes iguales y cuya unidad es el grado sexagesimal (1°).

$$1° = \frac{m\measuredangle\ 1\ \text{vuelta}}{360}$$

$$\rightarrow \boxed{m\measuredangle\ 1\ \text{vuelta} = 360°}$$

- **Subunidades**

  Minuto sexagesimal: 1'

  Segundo sexagesimal: 1"

- **Equivalencias**

  $1° <> 60'$

  $1' <> 60''$

C. Sistema centesimal

Es aquel en el que, el ángulo de una vuelta está dividido en 400 partes iguales y cuya unidad es el grado centesimal (1^g).

$$1^g = \frac{m\measuredangle\ 1\ \text{vuelta}}{400}$$

$$\rightarrow \boxed{m\measuredangle\ 1\ \text{vuelta} = 400^g}$$

- **Subunidades**

  Minuto centesimal: 1^m

  Segundo centesimal: 1^s

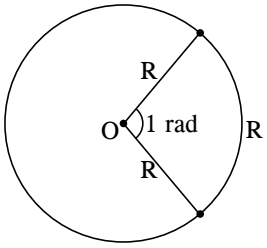
- **Equivalencias**

  $1^g <> 100^m$

  $1^m <> 100^s$

D. Sistema radial

De la definición de un radián



Relacionamos la longitud de un arco con su ángulo central correspondiente

$$1\ \text{rad} \rightarrow R$$

$$m\measuredangle 1\ \text{vuelta} \rightarrow 2\pi R$$

$$m\measuredangle 1\ \text{vuelta} = \frac{2\pi R \times 1\ \text{rad}}{R}$$

$$\therefore \boxed{m\measuredangle 1\ \text{vuelta} = 2\pi\ \text{rad}}$$

Luego

$$m\measuredangle 1\ \text{vuelta} = 360° <> 400^g <> 2\pi\ \text{rad}$$

También

$$\boxed{180° <> 200^g <> \pi\ \text{rad}}$$

Dicha equivalencia utilizaremos para realizar las conversiones entre sistemas.

Recuerda

Evolución de pi (π) a través del tiempo

PERSONA/PUEBLO	AÑO	VALOR
Biblia	550 a. C.	3
Egipto	2000 a. C.	3,1605
Ptolomeo	200 a. C.	377/120
Cheng Huing	300 a. C.	$\sqrt{10}$
Aryabhata	500	3,1416
Fibonacci	1220	3,141818
Machin	1706	100 decimales
Lambert	1766	Nombró a pi irracional
Lindeman	1882	Nombró a pi trascendente
IBM 7090	1961	100 000 decimales
Cray-2 (Canadá)	1987	100 000 000 decimales
Univ. de Tokio	1995	4 294 960 000 decimales

Helicosíntesis

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR I

tenemos

Sistema sexagesimal (S)

su

Unidad
- grado
- sexagesimal

$1° <> 60'$

$1' <> 60''$

donde

$m\sphericalangle 1 \text{ vuelta} <> 360°$

Sistema centesimal (C)

su

Unidad
- grado
- centesimal

$1^g <> 100^m$

$1^m <> 100^s$

donde

$m\sphericalangle 1 \text{ vuelta} <> 400^g$

Sistema radial (R)

su

Unidad
- radián

donde

$m\sphericalangle 1 \text{ vuelta} <> 2\pi \text{ rad}$

Factor de conversión

concluimos $\dfrac{9°}{10^g} = 1$

concluimos $\dfrac{180°}{\pi \text{ rad}} = 1$

concluimos $\dfrac{200^g}{\pi \text{ rad}} = 1$

Problemas resueltos

1. Reduzca

$$P = \frac{\frac{\pi}{24}\text{ rad} + 25^g + 20°}{120'}$$

Resolución

Cada medida angular la llevamos a grados sexagesimales.

- $\frac{\cancel{\pi}}{24}\cancel{\text{rad}} \times \frac{180°}{\cancel{\pi\text{ rad}}} = \frac{180°}{24}$
- $25^g \times \frac{9°}{10^g} = \frac{45°}{2}$
- $120' <> 2°$

Reemplazando en P tenemos

$$P = \frac{\frac{15°}{2} + \frac{45°}{2} + 20°}{2°}$$

$$P = \frac{30° + 20°}{2°} \rightarrow P = 25$$

Rpta.: 25

2. Si $(\overline{ab})^\circ <> \frac{3\pi}{10}$ rad, calcule $a - b$.

Resolución

Como las medidas son equivalentes, convertimos $\frac{3\pi}{10}$ rad a grados sexagesimales.

$$\frac{3\cancel{\pi}}{10}\cancel{\text{rad}} \times \frac{180°}{\cancel{\pi\text{ rad}}} = \frac{540°}{10} = 54$$

Luego

$$(\overline{ab})^\circ = 54°$$

Entonces $a = 5$ y $b = 4$

$$\therefore\ a - b = 1$$

Rpta.: 1

3. Calcule $a + b$ sabiendo que

$$\left(\frac{a^g + a^m}{a^m}\right)^g \left(\frac{b^g + b^m}{b^m}\right)^m = a^g\, b^m$$

Resolución

$$\left(\frac{a^g + a^m}{a^m}\right)^g \left(\frac{b^g + b^m}{b^m}\right)^m = a^g\, b^m$$

$$\left(\frac{100a^m + a^m}{a^m}\right)^g \left(\frac{100b^m + b^m}{b^m}\right)^m = a^g\, b^m$$

$$\left(\frac{101a^m}{a^m}\right)^g \left(\frac{100b^m}{b^m}\right)^m = a^g\, b^m$$

$$101^g\ 101^m = a^g\, b^m$$

$$1^g$$

$$\rightarrow 102^g\ 1^m = a^g\, b^m$$

Luego: $a = 102 \wedge b = 1$

$$\therefore\ a + b = 103$$

Rpta.: 103

4. Si $\frac{\pi}{24}$ rad $= a°\,(\overline{bc})'$, halle el valor de

$$\alpha = (a + b)(a - b)^g$$

en grados sexagesimales.

Resolución

$$\pi\text{ rad} = 180° \rightarrow \frac{\pi\text{ rad}}{24} = \frac{180°}{24} = 7{,}5° = 7° + 0{,}5°$$

Sabemos que: $1° = 60' \rightarrow 0{,}5° = 30'$

Entonces de la igualdad

$7° + 30' = 7°\ 30' = a°\,(\overline{bc})'$

$a = 7,\ b = 3$ y $c = 0$

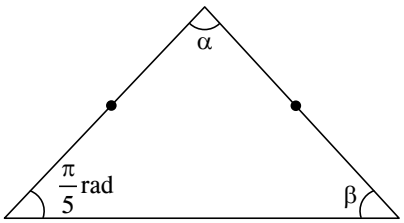
$\alpha = (a^2 - b^2)^g = (7^2 - 3^2)^g = 40^g$

Como nos piden en grados sexagesimales, hacemos la conversión

$$40^g \times \frac{9°}{10^g} = 36°$$

Rpta.: 36°

5. Halle el valor de α a partir del gráfico.



Resolución

Como el triángulo es isósceles

$$\beta = \frac{\pi}{5}\text{rad} = \frac{180°}{5} = 36°$$

Por propiedad del triángulo

$$\frac{\pi}{5}\text{rad} + \alpha + \beta = 180°$$

Entonces

$$36° + \alpha + 36° = 180°$$

$$\alpha + 72° = 180°$$

$$\therefore\ \alpha = 108°$$

Rpta.: 108°

Sesión I

Helicopráctica

1. Efectúe

$$T = \sqrt{\sqrt{a} - \frac{b}{4}}$$

donde $m + n = 80$, además $a°\ b' = m°\ n' + n°\ m'$.

2. Efectúe

$$K = \frac{2°\ 10'}{13'} + \frac{6^g\ 40^m}{80^m}$$

3. Reduzca

$$Q = \frac{\frac{2\pi}{9}\ \text{rad} + 65^g - \frac{17°}{2}}{20^g}$$

4. Si

$$\frac{5\pi}{4}\ \text{rad} <> \left(\overline{abc}\right)^g$$

efectúe $P = \sqrt{2a + b - c}$.

5. Halle el valor de x si $(2x+6)° + (x-5)^g = \frac{\pi}{4}$ rad.

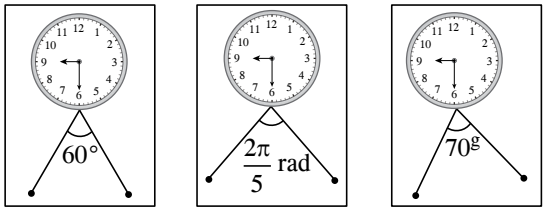
6. Los ángulos internos de un triángulo miden

$$57°;\ (3x + 10)^g \text{ y } \frac{\pi}{3}\ \text{rad}$$

Halle el valor de x.

7. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden $5x^g$ y $(4x+5)°$. Halle la medida del tercer ángulo en sexagesimales.

8. Glen observa tres relojes cuyos péndulos forman los siguientes ángulos, tal como muestra la figura.



A B C

Responda las preguntas.

a. ¿Podrá Glen comparar los ángulos formados?

b. Indique la suma de los tres ángulos en el sistema sexagesimal.

Helicotaller

Nivel I

1. Si

$$a°\ b'\ c'' = 5°\ 48'\ 23'' + 6°\ 25'\ 40''$$

calcule $\sqrt{a+b+c-4}$.

Resolución

2. Efectúe

$$Q = \frac{3°\ 20'}{50'} + \frac{4^g\ 80^m}{60^m}$$

Resolución

Nivel II

3. Reduzca

$$M = \frac{\frac{\pi}{12}\text{ rad} + 45^g - \frac{21°}{2}}{10^g}$$

Resolución

4. Si $\frac{2\pi}{5}$ rad $< > \left(\overline{ab}\right)^g$, efectúe

$$G = \sqrt[3]{a+b}$$

Resolución

5. Halle el valor de x si

$$(3x+9)° + (7x-3)^g = \frac{\pi}{2}\text{ rad}$$

Resolución

Nivel III

6. Los ángulos internos de un triángulo miden

$$48°;\ 80^g \text{ y } \frac{\pi}{2x}\text{ rad}$$

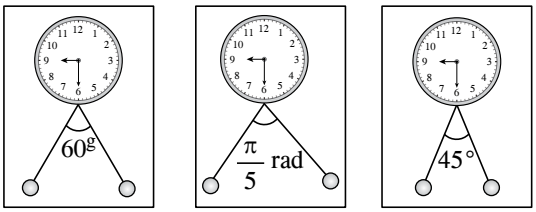
Halle el valor de x.

Resolución

7. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden $3x°$ y $(5x-10)^g$. Halle la medida del tercer ángulo en radianes.

Resolución

8. Se observa tres relojes cuyos péndulos forman los siguientes ángulos, tal como muestra la figura.



A B C

Realizando las comparaciones angulares, evalué si las afirmaciones son correctas o incorrectas.

Afirmaciones	Correcta	Incorrecta
A > C		
B > A		
A y B son ángulos complementarios		

Resolución

Helicodesafío

1. Si un grado equis (1^x) equivale a la 480 ava parte de una vuelta, ¿a cuántos grados equivale $\frac{5}{4}$ radianes?

A) $\left(\frac{500}{\pi}\right)^x$ B) $\left(\frac{480}{\pi}\right)^x$ C) $\left(\frac{200}{\pi}\right)^x$

D) $\left(\frac{400}{\pi}\right)^x$ E) $\left(\frac{300}{\pi}\right)^x$

2. Si $\left(\frac{243}{20}\right)^0$ se expresa en la forma $x^g\, y^m$, efectúe

$$E = \sqrt{\frac{y-37}{x}} - 1$$

A) 4 B) 3 C) 2

D) 1 E) 0

Helicorreto

1. Reduzca

$$A = \left(\frac{1^{o}}{60'} + \frac{1^{g}}{10^{m}} + \frac{500^{g}}{10\,000}\right)^{\frac{1}{2}}$$

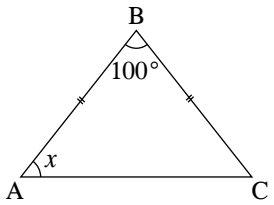
A) 4 B) 5 C) 3
D) 1 E) 2

2. Si $(\overline{xy})° <> \frac{\pi}{4}$ rad, efectúe

$$P = (x+y)^{x/2} + (x-y)^{y}$$

A) 76 B) 72 C) 82
D) 80 E) 81

3. Del gráfico, halle el valor x en radianes.



A) $\frac{4\pi}{9}$ rad B) $\frac{2\pi}{9}$ rad C) $\frac{\pi}{9}$ rad
D) $\frac{\pi}{3}$ rad E) $\frac{\pi}{6}$ rad

4. Halle el valor de

$$A = \frac{\frac{72°}{5} + \frac{11\pi}{50}\text{rad}}{10^{g}}$$

A) 2 B) 3 C) 4
D) 6 E) 5

5. Halle el valor de x si

$$120^{g} <> (5x+18)°$$

A) 20 B) 21 C) 23
D) 18 E) 19

Helicotarea

Nivel I

1. Si $a+b=70$, además $x°\ y' = a°\ b' + b°\ a'$, efectúe $P = \sqrt{x+y}$.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 9 E) 7

2. Efectúe

$$M = \frac{1°\ 20'}{40'} + \frac{2^{g}\ 10^{m}}{30^{m}}$$

A) 1 B) 8 C) 9
D) 4 E) 5

3. Reduzca

$$P = \frac{\frac{\pi}{5}\text{ rad} + 50^{g} + 9°}{\frac{\pi}{4}\text{ rad}}$$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

4. Si $\frac{3\pi}{5}$ rad $<> (\overline{abc})°$, efectúe $E = \sqrt{a+b+c}$.

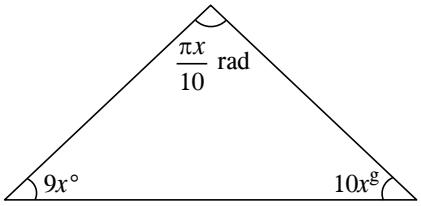
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Nivel II

5. Halle el valor de x si $(x+7)° + (x-6)^{g} = 13°$.

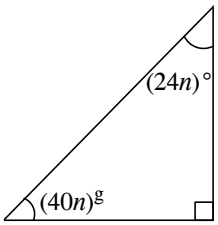
A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 9

6. Del gráfico, halle el valor de x.



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. Del gráfico, halle el valor de n.



A) 1 B) 2 C) 3

D) $\frac{3}{2}$ E) $\frac{1}{3}$

8. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles miden $(5x+4)°$ y $(6x)^g$. Halle la medida del tercer ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{15}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{2\pi}{5}$ rad

D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{3\pi}{5}$ rad

Nivel III

9. En un triángulo, sus ángulos están en progresión aritmética de razón $\frac{\pi}{9}$ rad. Halle la medida del ángulo menor en radianes.

A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{2\pi}{9}$ rad C) $\frac{\pi}{9}$ rad

D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{7}$ rad

10. Reduzca

$$R = \sqrt{\frac{a°\, b'}{a'} + \frac{b^g\, a^m}{b^m}}$$

si $\sqrt{\frac{a}{b}} - \sqrt{\frac{b}{a}} = \sqrt{7}$.

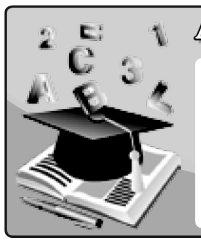
A) 11 B) 12 C) 13

D) 14 E) 15

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES II

CAPÍTULO 2

MATEMÁTICA



Aprendizajes esperados

- Representa los números de grados sexagesimales, centesimales y radianes de un ángulo en términos de S, C y R.
- Aplica la relación entre los números S, C y R en la resolución de problemas.

Helicocuriosidades

El nombre π

La notación con la letra griega π proviene de la inicial de las palabras de origen griego "περιφερεια" (periferia) y "περιμετρον" (perímetro) de un círculo, notación que fue utilizada primero por William Oughtred (1574-1660), y propuesto su uso por el matemático galés William Jones (1675-1749), aunque fue el matemático Leonard Euler, con su obra *Introducción al cálculo infinitesimal* de 1748, quien la popularizó. Fue conocida anteriormente como constante de Ludolph (en honor al matemático Ludolph van Ceulen) o como constante de Arquímedes (que no se debe confundir con el número de Arquímedes).

π

3.14159
265358979323
846264338327 95
0028841971693993 75
1058209749445923078
1640628620845998628 0
3482534211706798214808
6513282306647093844609550582 23
1725359408128481117450284102701938521105 5
5964462294895493038196442881097566593344612847564823378 6
7831652712019091456485669234603486104543266482133936072602491412737245
8700660631558817488152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194
1511609433057270365759591953092186117381932611793105118548074462379962749567351885752724891227938183
0119491298336733624406566430860213949463952247371907021798609437027705392171762931767523846748184676 6

Matemática india

Usando un polígono regular inscrito de 384 lados, a finales del siglo V el matemático indio Aryabhata estimó el valor en 3,1416. A mediados del siglo VII, estimando incorrecta la aproximación de Aryabhata, Brahmagupta calcula π como $\sqrt{10}$, cálculo mucho menos preciso que el de su predecesor.

Hacia 1400 Madhava obtiene una aproximación exacta hasta 11 dígitos (3,14159265359), siendo el primero en emplear series para realizar la estimación.

Matemática islámica

En el siglo IX Al-Jwarizmi en su *Álgebra* (Hisab al yabr ua al muqabala) hace notar que el hombre práctico usa 22/7 como valor de π, el geómetra usa 3, y el astrónomo 3,1416. En el siglo XV, el matemático persa Ghiyath al-Kashi fue capaz de calcular el valor aproximado de π con nueve dígitos, empleando una base numérica sexagesimal, lo que equivale a una aproximación de 16 dígitos decimales: $2\pi = 6{,}2831853071795865$.

Referencias bíblicas

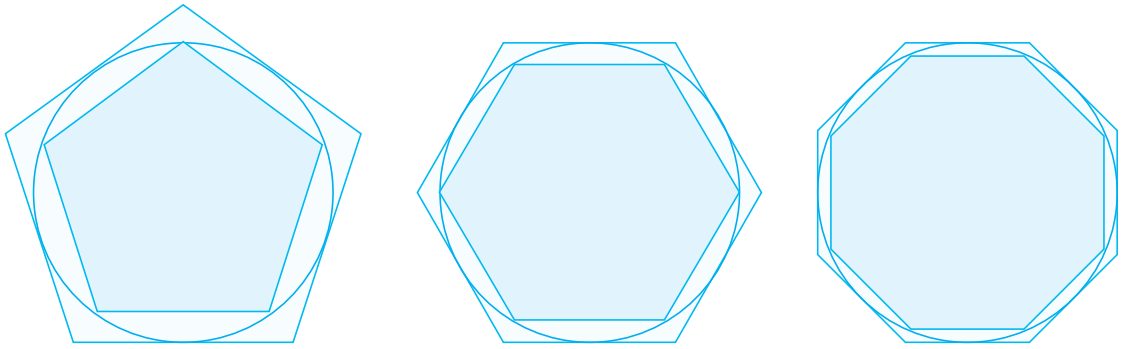
Una de las referencias indirectas más antiguas del valor aproximado de π se puede encontrar en un versículo de la Biblia:

"(23) Hizo fundir asimismo un mar de diez codos de un lado al otro, perfectamente redondo. Tenía cinco codos de altura y a su alrededor un cordón de treinta codos. (26) El grueso del mar era de un palmo menor, y el borde era labrado como el borde de un cáliz o de flor de lis; y cabían en él dos mil batos."

I Reyes 7:23-26 (Reina-Valera 1995)

El codo mide aproximadamente 45 cm y el palmo menor 7,5 cm. Se debe hallar el valor del radio restando el diámetro total con el grosor del artefacto y dividiendo por dos, dando 210 cm. Con estos datos, se puede hallar el valor de π usado aquí mediante la fórmula $C = 2\pi r$: $C/2 * r = \pi$. Se reemplazan los números $1350/2 * 210$ y se da que $\sim 3{,}2143$. Un valor aproximado a π.

Una cita similar se puede encontrar en II Crónicas 4:2. En él aparece en una lista de requerimientos para la construcción del Gran Templo de Salomón, construido sobre el 950 a. C.



Responda.

1. ¿Quién fue el primero en sugerir que 3,14 era una buena aproximación de π?

_____

_____

2. ¿Cuáles fueron las aproximaciones racionales del π dadas por el astrónomo chino Zu Chongzhi?

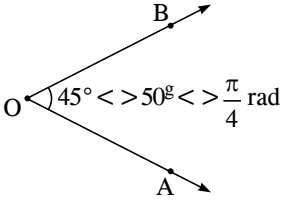
_____

_____

Helicoteoría

SISTEMAS DE MEDIDAS ANGULARES II

Sea el ángulo AOB medido en los tres sistemas convencionales.



Hacemos

$$\frac{45°}{180°} = \frac{50^g}{200^g} = \frac{\frac{\pi}{4}\text{ rad}}{\pi\text{ rad}} = \frac{1}{4}$$

Observe que el resultado es el mismo.

En general

$$\boxed{\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi} = k}$$

Luego uniformizamos los números S, C y R en función de k

$S = 180k$	También	$S = 9n$
$C = 200k$		$C = 10n$
$R = \pi k$		$R = \frac{\pi n}{20}$

donde k y n son constantes diferentes.

Recuerda

S: número de grados sexagesimales

C: número de grados centesimales

R: número de radianes

Helicosíntesis

SISTEMAS DE MEDICIÓN ANGULAR II

tenemos

Sistema sexagesimal (S)	**Sistema centesimal (C)**	**Sistema radial (R)**
donde	donde	donde
m∢1vuelta <> 360°	m∢1vuelta <> 400^g	m∢1vuelta <> 2π rad

concluimos en

$$\frac{S}{180} = \frac{C}{200} = \frac{R}{\pi}$$

$$\frac{S}{9} = \frac{C}{10} = \frac{R}{\frac{\pi}{20}}$$

Ángulos de:

S: número de grados sexagesimales

C: número de grados centesimales

D: número de radianes

Problemas resueltos

1. Reduzca

$$M = \sqrt[4]{\frac{2S-C}{C-S} + \sqrt{\frac{4C-S}{C-S} + 5} + 2}$$

siendo S y C los números de grados sexagesimales y centesimales del mismo ángulo.

Resolución

Hacemos $S = 9n$ y $C = 10n$

$$M = \sqrt[4]{\frac{2(9n)-10n}{10n-9n} + \sqrt{\frac{4(10n)-9n}{10n-9n} + 5} + 2}$$

$$M = \sqrt[4]{\frac{8n}{n} + \sqrt{\frac{31n}{n} + 5} + 2} \rightarrow M = \sqrt[4]{8+6+2}$$

$$\therefore M = 2$$

Rpta.: 2

2. Si $S = x^x + x + 4$ y $C = x^x + x + 5$, halle la medida del ángulo en radianes, donde

S : número de grados sexagesimales

C : número de grados centesimales del mismo ángulo

Resolución

Hacemos $S - 4 = x^x + x$

$C - 5 = x^x + x$

Luego $S - 4 = C - 5$

$C - S = 1$

$10n - 9n = 1 \rightarrow n = 1$

$$R = \frac{\pi}{20} \times 1$$

$$\therefore m\measuredangle = \frac{\pi}{20} \text{ rad}$$

Rpta.: $\frac{\pi}{20}$ rad

3. Si la media armónica entre el número de grados sexagesimales y centesimales de un ángulo es $\frac{360}{19}$, halle la medida de dicho ángulo en radianes.

Resolución

Tenemos

$$\frac{2}{\frac{1}{S} + \frac{1}{C}} = \frac{2SC}{C + S} = \frac{360}{19} \rightarrow \frac{2(9n)(10n)}{19n} = \frac{360}{19}$$

Luego $n = 2$

$$R = \frac{\pi}{20} \times 2$$

$$\therefore m\measuredangle = \frac{\pi}{10} \text{ rad}$$

Rpta.: $\frac{\pi}{10}$ rad

4. Determine la medida radial para un ángulo que cumple $8^{S+13} = 16^C$, donde S y C son lo convencional.

Resolución

Tenemos de la igualdad

$$(2^3)^{S+13} = (2^4)^C$$

$$2^{3S+39} = 2^{4C}$$

$$\rightarrow 3S + 39 = 4C$$

Haciendo $S = 9k$ y $C = 10k$

$$\rightarrow 3(9k) + 39 = 4(10k)$$

$$27k + 39 = 40k$$

$$39 = 13k$$

$$k = 3$$

Piden la medida radial

$$R = \frac{\pi}{20}k$$

Como $k = 3$

$$R = \frac{3\pi}{20} \text{ rad}$$

Rpta.: $\frac{3\pi}{20}$ rad

5. Halle el valor de R si

$$\frac{3S - 2C}{C - S} = \frac{R + \pi}{R - \pi}$$

siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo.

Resolución

$$\frac{3(9n) - 2(10n)}{10n - 9n} = \frac{\frac{\pi n}{20} + \pi}{\frac{\pi n}{20} - \pi}$$

$$\frac{7\cancel{n}}{\cancel{n}} = \frac{\frac{\cancel{\pi} n + 20\cancel{\pi}}{\cancel{20}}}{\frac{\cancel{\pi} n - 20\cancel{\pi}}{\cancel{20}}}$$

$$7 = \frac{n + 20}{n - 20}$$

$$7n - 140 = n + 20$$

$$6n = 160$$

$$n = \frac{80}{3}$$

Luego

$$R = \frac{\pi}{20} \times \frac{80}{3}$$

$$R = \frac{4\pi}{3} \text{ rad}$$

Rpta.: $\frac{4\pi}{3}$ rad

Sesión I

Helicopráctica

1. Un profesor de matemáticas decide premiar a dos de sus mejores estudiantes, otorgándoles puntos extras para su promedio final; para esto les indica que la cantidad de puntos obtenidos será el resultado de sus tickets entregados respectivamente.

Juan $\boxed{\sqrt{\dfrac{C+S}{C-S}+\dfrac{20}{3}\cdot\dfrac{S}{C}}-2}$

Elías $\boxed{\sqrt{\dfrac{3S-C}{C-S}-\dfrac{10}{9}\cdot\dfrac{S}{C}}-2}$

Responda la siguiente pregunta:

¿Cuántos puntos extras obtuvieron cada uno?

2. Siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo que cumpla

$$3S-2C=49$$

determine la medida del ángulo en grados sexagesimales.

3. Simplifique

$$M=\frac{\dfrac{\pi C}{5}+20R}{\dfrac{\pi S}{2}+30R}$$

siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo.

4. Determine la medida de un ángulo en radianes si

$$\frac{C-S}{3}+\frac{30R}{\pi}=11$$

siendo S, C y R lo convencional para el mismo ángulo.

5. Determine la medida del ángulo en radianes, siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo que cumpla

$$S=x^x-2$$
$$C=x^x+3$$

6. Si

$$S=7m-2$$
$$C=8m-4$$

siendo S y C lo convencional, determine la medida del ángulo en radianes.

7. Determine la medida de un ángulo en radianes si

$$\frac{S}{180}+\frac{C}{100}+\frac{R}{\pi}=\left(\frac{C-S}{5}\right)^2$$

siendo S, C y R los números de grados sexagesimales, centesimales y radianes del mismo ángulo.

8. Siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo, determine la medida del ángulo en grados sexagesimales si

$$S+C-R=76-\frac{\pi}{5}$$

Helicotaller

Nivel I

1. Las edades de tres hermanos, Javier, André y Thomas, están dados en relación a las siguientes tarjetas:

A	B	C
$\sqrt{\dfrac{2S-C}{C-S}+1}$	$\sqrt{\dfrac{2C+S}{C-S}-4}$	$\sqrt{\dfrac{3S+C}{C-S}-1}$

donde

- Javier tienen A años.
- André tiene B años.
- Thomas tiene C años.

Indique las edades de cada hermano.

Resolución

2. Siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo que cumpla

$$3C-2S=36$$

determine la medida del ángulo en grados centesimales.

Resolución

Nivel II

3. Simplifique

$$M=\frac{\dfrac{\pi S}{3}+40R}{\dfrac{\pi C}{10}+30R}$$

siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo.

Resolución

4. Determine la medida de un ángulo en radianes si

$$\frac{C-S}{2}+\frac{50R}{\pi}=10$$

siendo S, C y R lo convencional para el mismo ángulo.

Resolución

5. Si

$$S = 3x - 10$$
$$C = 3x - 8$$

siendo S y C lo convencional, determine la medida del ángulo en radianes.

Resolución

7. Determine la medida de un ángulo en radianes si

$$\frac{180}{S} + \frac{200}{C} + \frac{\pi}{R} = \frac{5}{(C - S)^2}$$

siendo S, C y R los números de grados sexagesimales, centesimales y radianes del mismo ángulo.

Resolución

Nivel III

6. Si

$$S = 5x + 3$$
$$C = 6x - 2$$

siendo S y C lo convencional, determine la medida del ángulo en grados centesimales.

Resolución

8. Siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo, determine la medida del ángulo en grados sexagesimales si

$$S + C + R = 760 + 2\pi$$

Resolución

Helicodesafío

1. Si x e y representan a los números de minutos centesimales y minutos sexagesimales, respectivamente, de un ángulo, además se cumple que $x-y=368$, entonces, ¿cuál es la medida de dicho ángulo en radianes?

A) $\frac{\pi}{60}$ rad B) $\frac{\pi}{10}$ rad C) $\frac{\pi}{25}$ rad

D) $\frac{\pi}{35}$ rad E) $\frac{\pi}{5}$ rad

2. Siendo S y C lo convencional para un ángulo, halle el valor de n si

$$\sqrt{S}\cdot\sqrt[6]{S}\cdot\sqrt[12]{S}\cdot\ldots\cdot\sqrt[n(n-1)]{S}=\left(\frac{9C}{10}\right)^{\frac{19-n}{n}}$$

A) 8 B) 10 C) 5

D) 6 E) 12

Helicorreto

1. Reduzca

$$H=\sqrt{\frac{C+S}{C-S}-\sqrt[3]{\frac{C+S}{C-S}+8}}$$

siendo C y S los números convencionales.

A) 2 B) 3 C) 4

D) 5 E) 6

2. Determine un ángulo en grados centesimales si cumple que

$$\frac{S}{6}+\frac{10R}{\pi}=\frac{9C}{S}$$

donde S, C y R es lo convencional.

A) 30^g B) 40^g C) 50^g

D) 60^g E) 70^g

3. Reduzca

$$Q=\frac{\pi^2(C-S)(C+S)}{380R^2}$$

donde S, C y R es lo convencional.

A) 10 B) 5 C) 15

D) 20 E) 25

4. Determine un ángulo en el sistema radial que cumple

$$S=ax^2+7$$
$$C=ax^2+12$$

A) $\frac{\pi}{3}$rad B) $\frac{\pi}{4}$rad C) $\frac{\pi}{6}$rad

D) $\frac{\pi}{2}$rad E) $\frac{\pi}{5}$rad

5. Halle el valor R si

$$\frac{2C-S}{2C+S}=\frac{R-\pi}{R+\pi}$$

A) $\frac{4\pi}{9}$ B) $\frac{20\pi}{9}$ C) $\frac{16\pi}{9}$

D) $\frac{5\pi}{9}$ E) $\frac{8\pi}{9}$

Helicotarea

Nivel I

1. Si S, C y R lo convencional para un mismo ángulo, reduzca

$$M=\sqrt{\frac{C+S}{C-S}+27\cdot\frac{C}{S}}$$

A) 2 B) 4 C) 3
D) 5 E) 7

2. Siendo S y C lo convencional para un mismo ángulo que cumpla $6S+5C=1040$, determine la medida del ángulo en radianes.

A) $\frac{\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{5}$ rad C) $\frac{\pi}{2}$ rad
D) $\frac{\pi}{9}$ rad E) $\frac{\pi}{18}$ rad

3. Reduzca

$$Q=\frac{2\pi S-\pi C+40R}{\pi(C-S)}$$

siendo S, C y R lo convencional para un ángulo.

A) 20 B) 15 C) 16
D) 10 E) 18

4. Determine la medida de un ángulo en radianes si

$$C+S+\frac{20R}{\pi}=80$$

siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo.

A) $\frac{\pi}{5}$ rad B) $\frac{\pi}{3}$ rad C) $\frac{\pi}{10}$ rad
D) $\frac{\pi}{2}$ rad E) $\frac{\pi}{4}$ rad

Nivel II

5. Reduzca

$$G=\frac{20R+\pi(C+S)}{20R+\pi(C-S)}$$

siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo.

A) 5 B) 10 C) 15
D) 20 E) 25

6. Si

$$S=8a-5$$
$$C=8a-1$$

siendo S y C lo convencional, determine la medida del ángulo en grado sexagesimal.

A) 27° B) 40° C) 36°
D) 54° E) 90°

7. Si se cumple que

$$S=5n+1$$
$$C=6n-2$$

siendo S y C lo convencional, determine la medida del ángulo en grados centesimales.

A) 20^g B) 36^g C) 54^g
D) 40^g E) 60^g

8. Determine la medida de un ángulo en radianes si

$$\frac{S}{90}+\frac{C}{100}+\frac{R}{\pi}=1$$

siendo S, C y R lo convencional para un mismo ángulo.

A) $\frac{\pi}{10}$ rad B) $\frac{2\pi}{5}$ rad C) $\frac{\pi}{5}$ rad
D) $\frac{\pi}{4}$ rad E) $\frac{\pi}{20}$ rad

Nivel III

9. Si S, C y R son lo convencional para un ángulo, además $S=x^x-2$ y $C=x^x+3$, halle el valor de R.

A) $\frac{\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{4}$ rad C) $\frac{3\pi}{5}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{3}$ rad

10. Si S, C y R son lo convencional para un ángulo, determine la medida del ángulo en radianes si

$$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{SR}{5\pi}}+\frac{1}{10}\sqrt{\frac{CR}{2\pi}}=\left(\frac{R}{\pi}\right)^2$$

A) $\frac{3\pi}{2}$ rad B) $\frac{\pi}{2}$ rad C) $\frac{1}{2}$ rad
D) 2 rad E) 2π rad

SECTOR CIRCULAR - LONGITUD DE ARCO - ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

CAPÍTULO 3

MATEMÁTICA

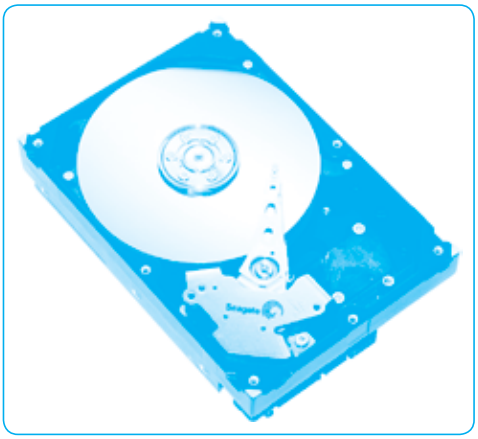
Aprendizajes esperados

- Reconoce el sector circular y sus elementos.
- Aplica la fórmula para calcular la longitud de arco y sus propiedades.
- Aplica la fórmula para calcular el área del sector circular.
- Aplica las propiedades en la resolución de problemas.

Helicocuriosidades

Discos magnéticos

Los discos magnéticos son los sistema de almacenamiento que en la actualidad tienen más importancia, ya que constituyen el principal soporte utilizado como memoria masiva. A pesar de que son más costosos que las cintas, son de acceso directo, y con ellos se consiguen tiempos medios de acceso mucho menores que con las cintas.



Un disco está constituido por una superficie metálica o plástica recubierta por una capa de una sustancia magnética. Los datos se almacenan mediante pequeños cambios en la imanación, en uno u otro sentido. El plato o disco puede ser de plástico flexible o rígido, en el primer caso tenemos disquetes o discos flexibles (en inglés floppy disk o diskettes) y en el segundo caso discos rígidos o duros.

Tanto en los discos rígidos como en los flexibles la información se graba en circunferencias concéntricas, no percibiéndose visualmente. Cada una de estas circunferencias constituye una pista. Asimismo el disco se considera dividido en arcos iguales denominados sectores, de esta forma cada pista está compuesta de sectores. Los sectores de las pistas más exteriores son de mayor longitud que las interiores, ahora bien el número de bits grabados en cada sector es siempre el mismo, con lo que la densidad de grabación será mayor en las pistas interiores que en las exteriores. Los sectores comienzan con una cabecera de identificación, indicando su dirección completa. Un cilindro es un conjunto de pistas, una en cada disco, que son accesibles simultáneamente por el conjunto de cabezas.

La lectura y escritura en la superficie del disco se hace mediante una cabeza. Esta suele ser de tipo cerámico, aunque inicialmente eran metálicas. La cabeza, en las unidades de cabezas móviles, está insertada en un extremo de un brazo mecánico, que se desplaza hacia el centro o hacia la parte externa del disco, bajo el control de los circuitos electrónicos del periférico.

El direccionamiento para leer o grabar un sector del disco se efectúa dando al periférico

- número de unidad
- número de superficie
- número de pista
- número de sector

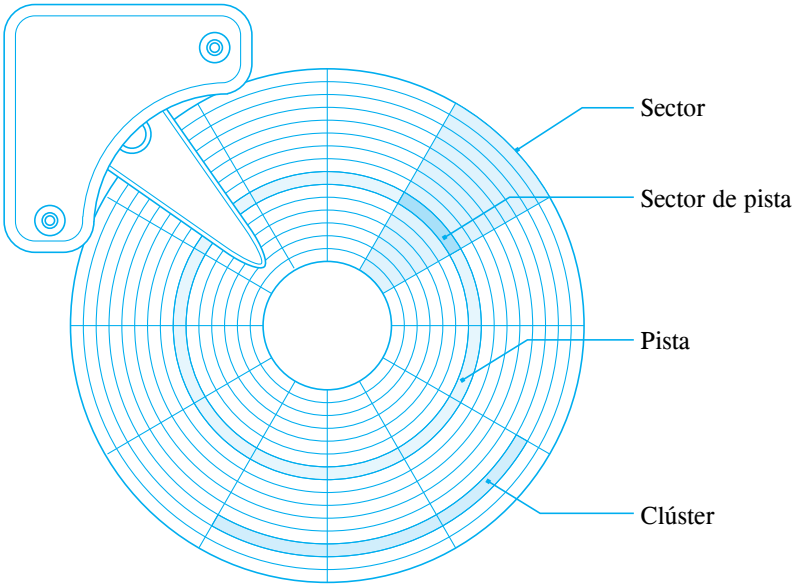
El brazo sitúa rápidamente la cabeza encima de la pista correspondiente y espera a que el sector en cuestión se posicione bajo la cabeza. En el acceso, por tanto, hay que considerar dos tiempos

- tiempo de búsqueda de la pista (t_b)
- tiempo de espera al sector (t_e)

Luego el tiempo de acceso será $t_a = t_b + t_e$. En las unidades de cabezas fijas, hay una cabeza por pista y por tanto $t_a = t_e$. La unidad de transferencia de datos y hacia el disco es el sector.

Los disquetes suelen tener una o varias referencias físicas (orificios y muescas) para poder identificar los sectores y pistas. Esto se denomina sectorización hardware o física. En los disquetes de 133 mm solo existe un orificio de alineamiento y referencia. Este orificio, cuando el disco gira, es detectado por un conjunto fotodiodo/fototransistor utilizándose como punto de referencia para el acceso a las distintas pistas y sectores. Las unidades de discos rígidos suelen tener unas muescas que identifican los límites de cada sector y el primer sector de la pista.

Antes de utilizar un disco es necesario efectuar en él unas grabaciones denominadas "dar formato" al disco. Al formatear un disco se definen por software las pistas y sectores, además se inicializa un directorio para la información sobre el contenido del disco (es como un índice). El formateo efectúa una sectorización que detecta y elimina para posteriores grabaciones, las zonas del disco deterioradas. El formateo incluye tablas con los nombres de los ficheros grabados en él, fecha y hora en que se crearon o actualizaron por última vez, espacio y direcciones físicas donde se encuentran.

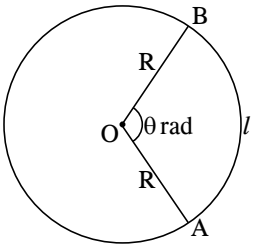


Helicoteoría

SECTOR CIRCULAR - LONGITUD DE ARCO - ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

1. Longitud de arco

Sea la longitud del arco $\widehat{AB}$ igual a $l_{\widehat{AB}}$.



$$\boxed{l_{\widehat{AB}} = R \cdot \theta}$$

Donde

R: radio de la circunferencia

θ: número de radianes del ángulo

$l_{\widehat{AB}}$: longitud del arco $\widehat{AB}$

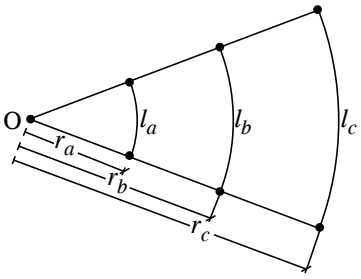
También podemos tener

$$\boxed{R = \frac{l}{\theta}} \text{ y } \boxed{\theta = \frac{l}{R}}$$

Propiedades

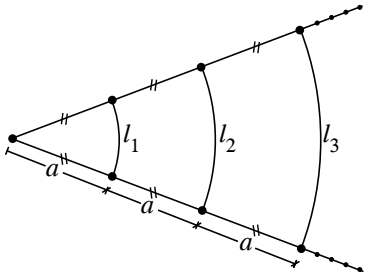
- Cuando los arcos son concéntricos se cumple

  "Cada longitud de arco es proporcional a su respectivo radio".



$$\boxed{\frac{l_a}{r_a} = \frac{l_b}{r_b} = \frac{l_c}{r_c}}$$

- Cuando la distancia que separa a los arcos y el primer arco con respecto al vértice del sector es la misma, se cumple que



Si $l_1 = l$, entonces $l_2 = 2l$

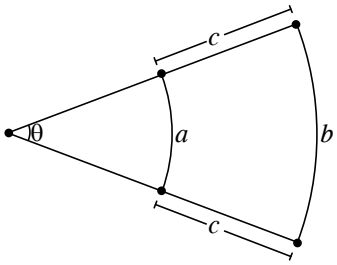
$l_3 = 3l$

$l_4 = 4l$

$\vdots$

$l_n = nl$

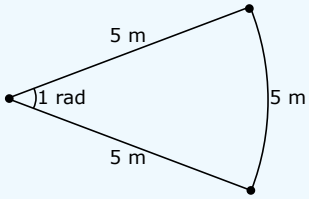
- Cuando se tiene dos arcos concéntricos y la distancia que los separa es conocida, se puede calcular el ángulo del sector.



Si a, b y c son conocidos, entonces

$$\boxed{\theta = \frac{b-a}{c}}$$

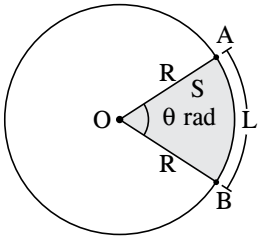
Observación



Cuando el ángulo del sector es un radián, el radio y la longitud de arco son iguales.

2. Área de un sector circular

Viene a ser el cálculo del área de la región limitada por un ángulo central y su arco correspondiente en una circunferencia.



Donde

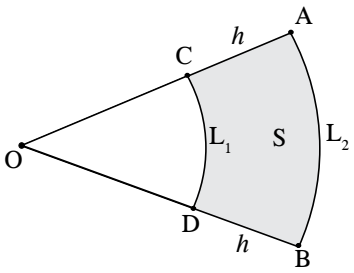
S: área del sector circular AOB

$$S = \frac{\theta R^2}{2} \qquad S = \frac{LR}{2}$$

$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$

Propiedades

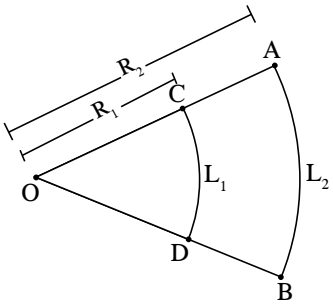
A) Cálculo del área de un trapecio circular.



Se cumple

$$S = \left(\frac{L_1 + L_2}{2}\right)h$$

B) La relación de áreas del sector AOB y COD están en la misma proporción que la relación de sus radios (R_1 y R_2) y sus longitudes (L_1 y L_2) elevados al cuadrado.

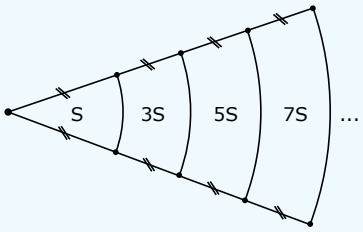


Se cumple

$$\frac{S_{\sphericalangle COD}}{S_{\sphericalangle AOB}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{L_1^2}{L_2^2}$$

Observación

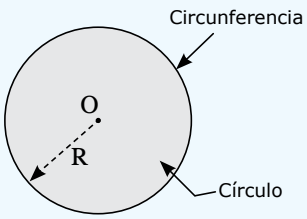
- Un caso particular de las propiedades de relaciones de áreas sería la siguiente:



S: área

Nota

- Círculo y circunferencia



Donde

- Longitud de una circunferencia

$$L_O = 2\pi \cdot R$$

- Área del círculo

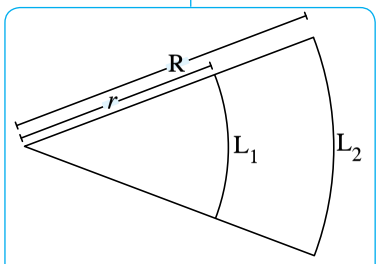
$$S_O = \pi \cdot R^2$$

Helicosíntesis

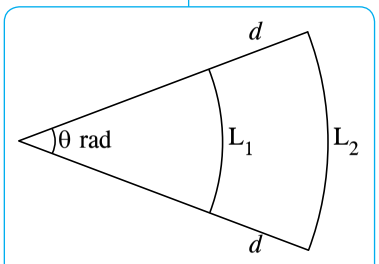
SECTOR CIRCULAR

LONGITUD DE ARCO

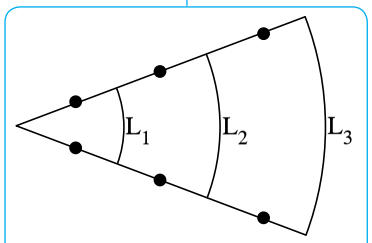
$L = R\theta$



$$\frac{L_1}{r} = \frac{L_2}{R}$$



$$\theta = \frac{L_2 - L_1}{d}$$



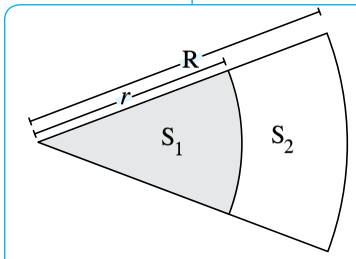
$L_1 = L$
$L_2 = 2L$
$L_3 = 3L$

ÁREA DEL SECTOR CIRCULAR

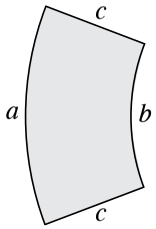
$$S = \frac{\theta R^2}{2}$$

$$S = \frac{RL}{2}$$

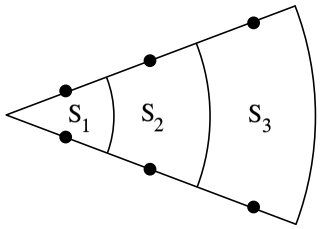
$$S = \frac{L^2}{2\theta}$$



$$\frac{S_1}{r^2} = \frac{S_1 + S_2}{R^2}$$



$$S = \left(\frac{a+b}{2}\right)c$$



$S_1 = S$
$S_2 = 3S$
$S_3 = 5S$

Problemas resueltos

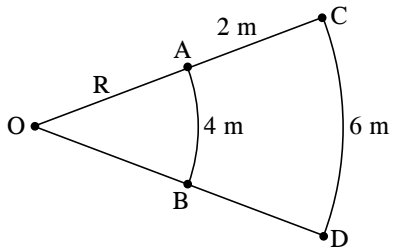
1. Determine el radio de una circunferencia tal que un arco de 35 cm de longitud subtiende un ángulo central de 3,5 rad.

Resolución

$$L = \theta \cdot R$$
$$35\text{ cm} = 3{,}5\text{ rad} \cdot R$$
$$35\text{ cm} = \frac{35}{10}\text{ rad} \cdot R$$
$$\therefore\ 10\text{ cm} = R$$

Rpta.: 10 cm

2. Del gráfico, halle el valor de R.

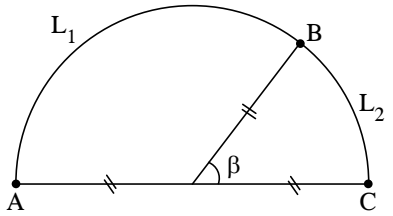


Resolución

$$\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$$
$$\frac{4\text{ m}}{R} = \frac{6\text{ m}}{R + 2\text{ m}}$$
$$4R + 8\text{ m} = 6R$$
$$8\text{ m} = 2R$$
$$\therefore\ 4\text{ m} = R$$

Rpta.: 4 m

3. Del gráfico, se cumple que $L_1 = 5L_2$. Halle el valor de β.

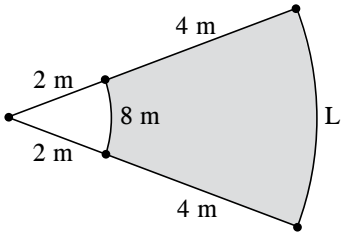


Resolución

$$L_1 = 5L_2$$
$$R(\pi - \beta) = 5R\beta$$
$$\pi - \beta = 5\beta$$
$$\pi = 6\beta$$
$$\therefore\ \frac{\pi}{6}\text{ rad} = \beta$$

Rpta.: $\frac{\pi}{6}$ rad

4. Del gráfico, calcule el área del trapecio circular.



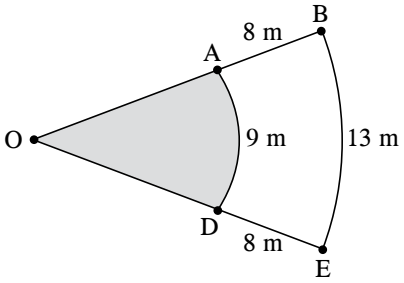
Resolución

➢ Calculando L
$$\frac{L}{6\text{ m}} = \frac{8\text{ m}}{2\text{ m}}$$
$$\frac{L}{6\text{ m}} = 4$$
$$L = 24\text{ m}$$

➢ Calculando el área
$$S = \left(\frac{8\text{ m} + 24\text{ m}}{2}\right)4\text{ m}$$
$$S = \left(\frac{32\text{ m}}{2}\right)4\text{ m}$$
$$\therefore\ S = 64\text{ m}^2$$

Rpta.: 64 m^2

5. Del gráfico, calcule el área de la región sombreada.



Resolución

Calculando el área del sector circular AOD.

➢ Calculando el ángulo central
$$\theta = \left(\frac{13\text{ m} - 9\text{ m}}{8\text{ m}}\right)\text{rad}$$
$$\theta = \frac{1}{2}\text{ rad}$$

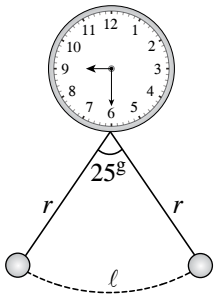
➢
$$S = \frac{\ell^2}{2\theta}$$
$$S = \frac{(9\text{ m})^2}{\cancel{2}\left(\frac{1}{\cancel{2}}\right)}$$
$$\therefore\ S = 81\text{ m}^2$$

Rpta.: 81 m^2

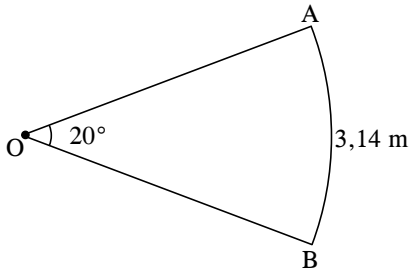
Sesión I

Helicopráctica

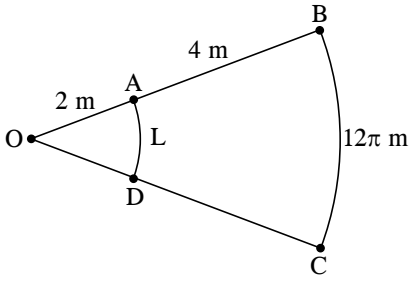
1. El péndulo de un reloj tiene 20 cm de longitud y recorre un arco de 25^g por segundo. ¿Cuántos centímetros recorre la punta del péndulo en un segundo? (Dato $\pi = 3{,}14$)



2. Halle la longitud del radio OA en el sector circular mostrado.

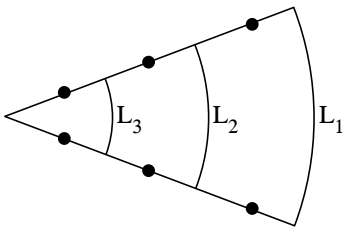


3. Del gráfico, halle el valor de L.

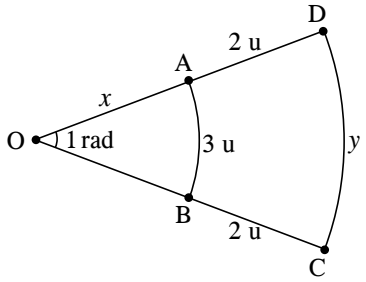


4. Del gráfico, simplifique

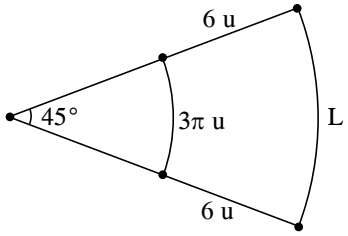
$$K = \frac{3L_3 - 2L_2 - L_1}{L_3 - L_1}$$



5. Del gráfico, calcule $x + y$.

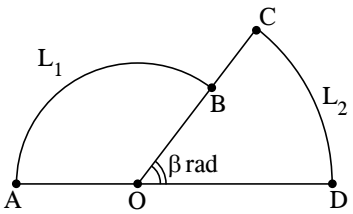


6. Del gráfico, halle el valor de L.

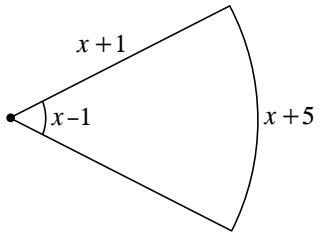


7. Del gráfico, determine el valor de β si

$$AO = OB = BC \text{ y } L_1 = L_2$$



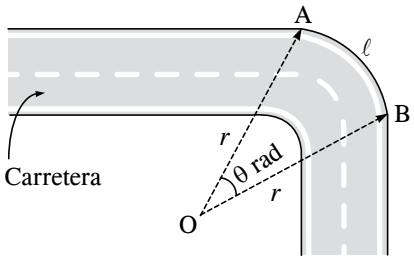
8. Del gráfico, determine la longitud del radio.



Helicotaller

Nivel I

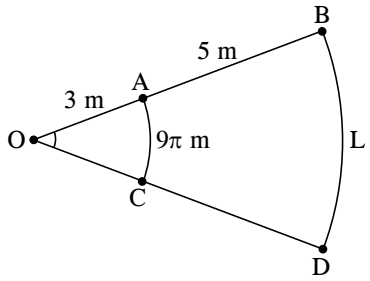
1. Una carretera tiene una curva de 20° con un radio de 630 pies. Halle la longitud de la curva. $\left(\text{Considere } \pi = \frac{22}{7}\right)$.



Resolución

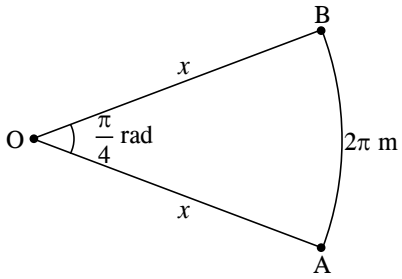
Nivel II

3. Del gráfico, halle el valor de L.



Resolución

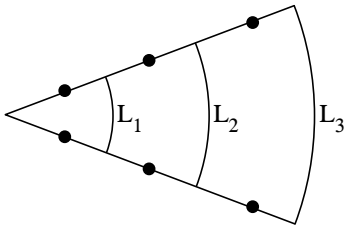
2. Halle la longitud del radio del sector AOB.



Resolución

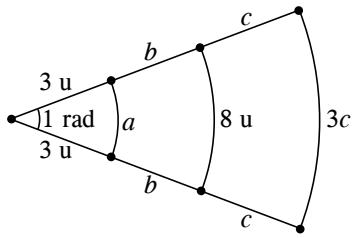
4. Del gráfico, reduzca

$$M = \frac{5L_1 + 2L_2 + L_3}{L_3 - L_1}$$



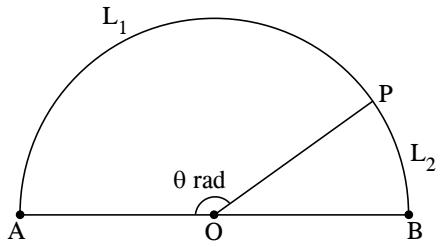
Resolución

5. Calcule $a + b + c$.



Resolución

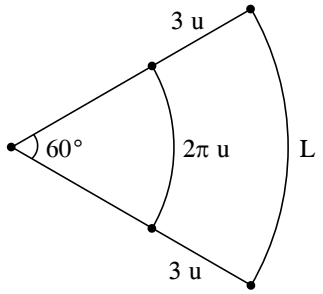
7. Del gráfico, halle el valor de θ si $L_1 = 4L_2$.



Resolución

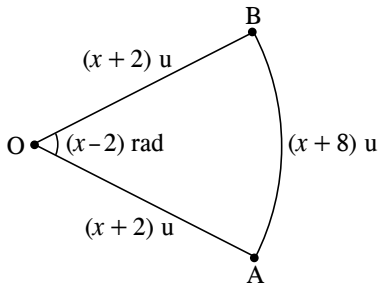
Nivel III

6. Del gráfico, halle el valor de L.



Resolución

8. Del gráfico, determine $l_{\widehat{AB}}$.



Resolución

Helicodesafío

1. Calcule el perímetro de la región sombreada. (A y D son centros).

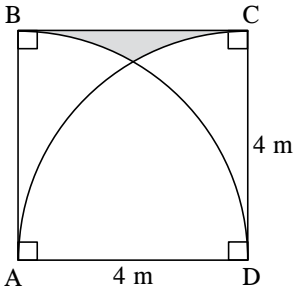
A) $(\pi + 3)$ m

B) $2\left(\frac{\pi}{3} + 1\right)$ m

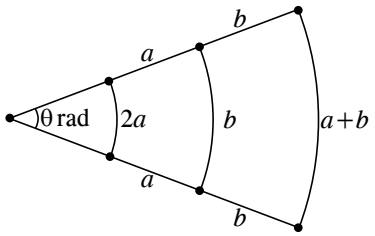
C) $4\left(\frac{\pi}{3} + 1\right)$ m

D) $3\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ m

E) $2\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ m



2. Halle el valor de θ.



A) $\sqrt{3} - 1$ B) 2 C) $\sqrt{2} + 1$

D) $2\sqrt{2}$ E) $\sqrt{2} - 1$

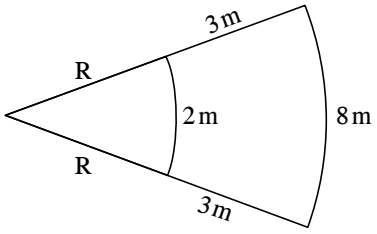
Helicorreto

1. Determine el radio de una circunferencia tal que un arco de 15 cm de longitud subtiende un ángulo central de 1,5 rad.

A) 15 m B) 12 cm C) 10 m

D) 5 cm E) 8 cm

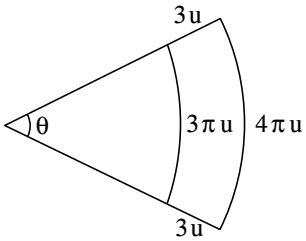
2. Halle el valor de R si



A) 3 m B) 0,5 m C) 1 m

D) 0,6 m E) 2 m

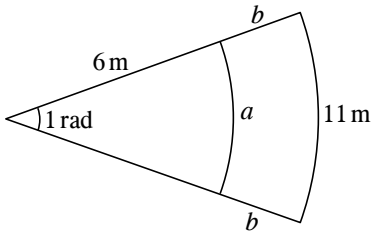
3. Halle la medida del ángulo θ el sistema sexagesimal.



A) 15° B) 30° C) 45°

D) 60° E) 90°

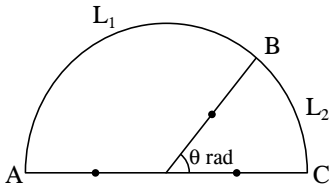
4. Calcule $a+b$ si



A) 10 m B) 11 m C) 9 m

D) 12 m E) 5 m

5. De la figura, se cumple que $L_1 = 8L_2$. Halle el valor de θ.



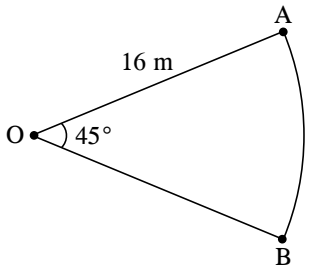
A) $\frac{\pi}{2}$ B) $\frac{\pi}{4}$ C) $\frac{\pi}{8}$

D) $\frac{\pi}{7}$ E) $\frac{\pi}{9}$

Helicotarea

Nivel I

1. Halle la longitud del arco AB en el gráfico mostrado.

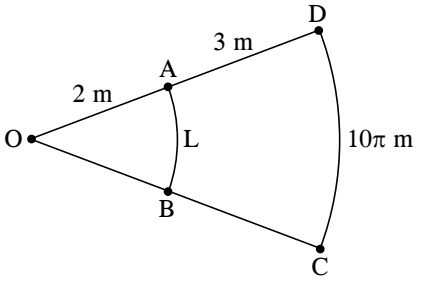


A) 10π m B) 4π m C) 2π m
D) 5π m E) 8π m

2. Determine la longitud del radio de un sector circular si su ángulo central mide 2 rad y la longitud del arco 8 m.

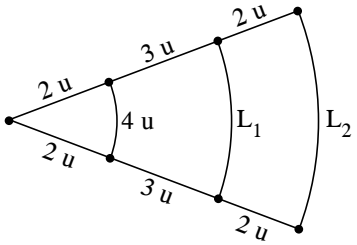
A) 4 m B) 2 m C) π m
D) 1 m E) 5 m

3. Del gráfico, halle el valor de L.



A) π m B) 2π m C) 3π m
D) 4π m E) 5 m

4. Del gráfico, calcule $L_2 - L_1$.

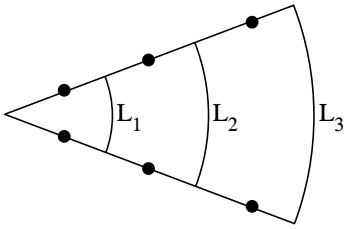


A) 1 u B) 2 u C) 4 u
D) 8 u E) 7 u

Nivel II

5. Del gráfico, simplifique

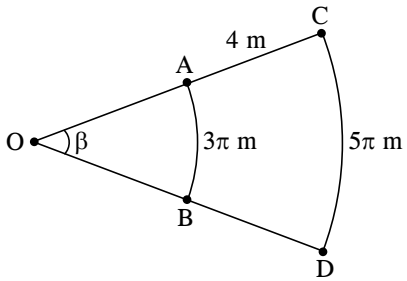
$$K = \frac{3L_2 + L_1 - L_3}{L_2 - L_1}$$



A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

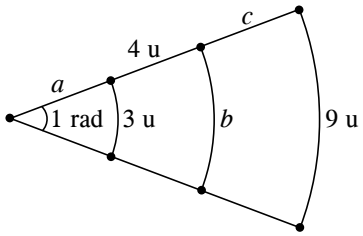
6. Del gráfico, halle el valor de β en grados sexagesimales.

A) 90°
B) 45°
C) 36°
D) 60°
E) 30°

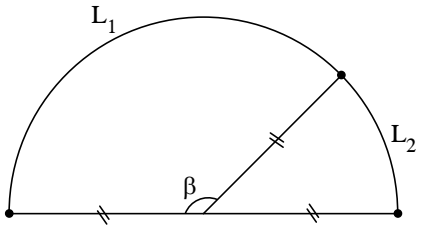


7. Del gráfico, efectúe $M = a + b + c$.

A) 16 u
B) 10 u
C) 12 u
D) 11 u
E) 7 u



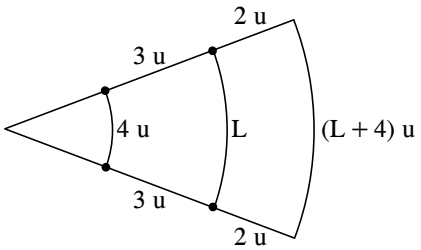
8. Del gráfico, halle el valor de θ si $L_1 = 3L_2$.



A) $\frac{3\pi}{4}$ rad B) $\frac{\pi}{4}$ rad C) $\frac{\pi}{3}$ rad
D) $\frac{\pi}{5}$ rad E) $\frac{\pi}{2}$ rad

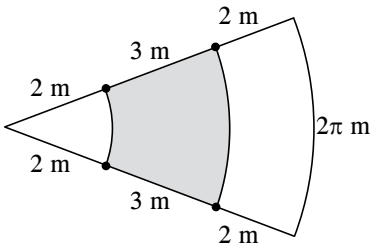
Nivel III

9. Del gráfico, halle el valor de L.



A) 2 u B) 8 u C) 10 u
D) 16 u E) 20 u

10. Del gráfico, calcule el perímetro de la región sombreada. (Dato $\pi = 3{,}14$)



A) 12,28 m B) 13,14 m C) 16,07 m
D) 10,28 m E) 15,34 m